מבוא להסתברות/ פתרונות בחומר החדש

שלומי

שאלה 1

$X \sim \exp(\lambda)$.

מהו $P(1 \le X \le 2)$? מהו $P(1 \le X < 2)$?

פתרון 1

מתקיים $P(1 \le X \le 2) = F_X(2) - F_X(1) = (1-e^{-2\lambda}) - (1-e^{-\lambda}) = e^{-\lambda} - e^{-2\lambda}$.

מתקיים גם $P(1 \le X \le 2) = \int_1^2 f_X(x)dx = \int_1^2 \lambda e^{-\lambda x}dx$.

מכיון שמשתנה מעריכי הוא משתנה רציף ומכיון שמשתנה רציף מקבל כל ערך של נקודה בודדת בסיכוי אפס, אז מתקיים $P(1 \le X < 2) = P(1 \le X \le 2)$.

שאלה 2

$X \sim U(0,1)$ (אחיד רציף).

איך מתפלג המינימום בין שני המרחקים של X מ 0 ומ 1 ?

פתרון 2

יהי Y - המינימום בין המרחקים של X מ 0 ומ 1.

ראשית נבחין שטווח הערכים שהמשתנה Y יכול לקבל הוא הקטע שבין 0 ל 0.5 .

עבור כל $y < 0$ מתקיים $F_Y(y) = P(Y \le y) = 0$.

עבור כל $y > 0.5$ מתקיים $F_Y(y) = P(Y \le y) = 1$.

עבור כל $0 \le y \le 0.5$ מתקיים

$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(0 \le X \le y) + P(1-y \le X \le 1) = y + (1-(1-y)) = 2y$.

קבלנו ש $Y \sim U(0,0.5)$.

<u>שאלה 3</u>

X משתנה מקרי בעל פונקצית צפיפות

$$f_X(x)=\begin{cases} cx & 1\le x\le 2 \\ 0 & else \end{cases}$$

מצאו את הקבוע c ומצאו את פונקצית ההסתברות המצטברת של המשתנה X.

<u>פתרון 3</u>

באופן כללי מתקיים $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx=1$. כאן מתקיים $\int_1^2 f_X(x)dx=1$ ולכן מתקיים $\int_1^2 cxdx=1$ ולכן מתקיים $0.5cx^2\Big]_1^2=1$ ולכן מתקיים $0.5c\left(2^2-1^2\right)=1$ ולכן מתקיים $c=\frac{2}{3}$.

עבור $X<1$ מתקיים $F_X(x)=0$. עבור $X>2$ מתקיים $F_X(x)=1$.

עבור $1\le x\le 2$ מתקיים $F_X(x)=\int_1^x f_X(z)dz=\int_1^x \frac{2}{3}zdz=\frac{1}{3}z^2\Big]_1^x=\frac{1}{3}\left(x^2-1\right)$.

שימו לב שכצפוי פונקצית ההסתברות המצטברת רציפה בכל נקודה כולל הנקודות 1 ו 2.

<u>שאלה 4</u>

יהי X משתנה מקרי בעל פונקצית צפיפות

$$f_X(x)=\begin{cases} x & 0\le x\le 1 \\ 0.5 & 5\le x\le 6 \\ 0 & else \end{cases}$$

מצאו $E(X)$.

<u>פתרון 4</u>

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)xdx=\int_0^1 x^2dx+\int_5^6 0.5xdx=\frac{1}{3}x^3]_0^1+\frac{1}{4}x^2]_5^6=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\left(6^2-5^2\right)$$

שאלה 5

יהי $X \sim U(0,b)$ (אחיד רציף).

מצאו $\lim_{n\to\infty} E\left(X^n\right)$ עבור על פרמטר אפשרי $b>0$.

פתרון 5

פונקצית הצפיפות של משתנה אחיד בקטע $(0,b)$ היא $\frac{1}{b}$ בקטע $(0,b)$ ו 0 בנקודות אחרות.

מתקיים $E\left(X^n\right)=\int_0^b \frac{1}{b}x^n dx=\frac{1}{b(n+1)}x^{n+1}\Big]_0^b=\frac{b^n}{n+1}$.

כאשר $b\le 1$ מתקיים $\lim_{n\to\infty} E\left(X^n\right)=0$. כאשר $b>1$ מתקיים $\lim_{n\to\infty} E\left(X^n\right)=\infty$.

נתן גם הסבר אינטואיטיבי לכך: אם מתקבלים רק ערכי X קטנים מ 1, אז בכל מקרה החזקה ה n- ית שואפת לאפס. מכיון שמדובר בהתפלגות רציפה, אז גם אם $b=1$, אז הערך 1 מתקבל בהסתברות אפס. אם $b>1$, אז בהסתברות חיובית X מקבל ערכים גדולים מ 1 שחזקתם ה n- ית שואפת לאינסוף.

שאלה 6

יהי $X \sim N(0,1)$. יהי $Y=|X|$ (הערך המוחלט של X).

הראו על-ידי שימוש בטבלת ההתפלגות הנורמלית שמתקיים $E(Y)>0.36$.

אמתו את התוצאה הזאת על-ידי חישוב $E(Y)=\int_0^\infty f_Y(y)y dy$.

פתרון 6

המשתנה Y מקבל רק ערכים אי שליליים. כל קטע שמכיל רק נקודות אי שליליות מתקבל על-ידי המשתנה Y בהסתברות ששווה לפעמיים ההסתברות שהמשתנה X מקבל את אותו הקטע.

אפשר להסביר את הטענה בדרכים שונות המתבססות על שימוש בטבלת ההתפלגות המצטברת של משתנה נורמלי.

מתקיים למשל

$$
\begin{aligned}
&E(Y)\ge P(0\le Y<0.6)\cdot 0+P(0.6\le Y<2)\cdot 0.6+P(Y\ge 2)\cdot 2=\\
&=2P(0.6\le X<2)\cdot 0.6+2P(X\ge 2)\cdot 2=\\
&=2\cdot 0.6[P(X\ge 0.6)-P(X\ge 2)]\cdot +2\cdot 2P(X\ge 2)=\\
&=1.2[(1-\phi(0.6))-(1-\phi(2))]+4[1-\phi(2)]=1.2[\phi(2)-\phi(0.6)]+4[1-\phi(2)]=\\
&=1.2[0.9772-0.7257]+4[1-0.9772]
\end{aligned}
$$

מכיון שהמשתנה Y מקבל כל קטע של מספרים חיוביים בהסתברות כפולה מזו שהמשתנה X מקבל את אותו קטע, אז הצפיפות של Y כפולה מזו של X בכל נקודה חיובית.

מתקיים עבור כל $y \ge 0$: $f_Y(y) = 2f_X(y) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$.

$$E(Y) = \int_0^\infty f_Y(y) y dy = \int_0^\infty \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} y dy = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{y^2}{2}} y dy$$

נציב $t = \frac{y^2}{2}$. מתקיים $dt = ydy$. נקבל ש $E(Y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty e^{-t} dt$. האינטגרל הוא אינטגרל של פונקצית צפיפות של משתנה $\exp(1)$ על כל התחום וככזה הוא שווה ל 1. לכן מתקיים $E(Y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

<u>שאלה 7</u>

יהיו $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ סדרת משתנים ב"ת. נניח שמתקיים עבור כל $1 \le i < \infty$:

$$P\left(X_i = +\frac{1}{2^i}\right) = P\left(X_i = -\frac{1}{2^i}\right) = 0.5$$

הראו שהחוק החלש חל על הסדרה $\{X_i\}_{i=1}^\infty$.

האם החוק החלש חל על הסדרה בכל מקרה גם אם המשתנים לא היו ב"ת ?

<u>פתרון 7</u>

נראה שהחוק החלש חל על הסדרה בכל מקרה וגם אם המשתנים הם תלויים.

עבור כל $i \ge 1$ מתקיים $E(Y_i) = 0$.

מתקיים בכל מקרה ש $\left|\sum_{i=1}^\infty Y_i\right| \le \sum_{i=}^\infty |Y_i| = \sum_{i=1}^\infty \frac{1}{2^i} = 1$. עבור כל n סופי מתקיים תמיד $\left|\sum_{i=1}^n Y_i\right| \le 1$.

לכן מתקיים בהסתברות 1: $\frac{\left|\sum_{i=1}^n Y_i\right|}{n} \le \frac{1}{n}$. עבור כל $\delta > 0$ נתון יתקיים

$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\sum_{i=1}^n \frac{Y_i}{n} - \sum_{i=1}^n \frac{E(Y_i)}{n}\right| > \delta\right) = 0$. לכן החוק החלש חל על הסדרה.

שאלה 8

יהיו $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ סדרת משתנים ב"ת שווי התפלגות בעלי שונות סופית.

נגדיר סדרת משתנים $\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$ לפי

$$Y_i = \begin{cases} X_i & X_i > 1 \\ 0 & X_i \le 1 \end{cases}$$

האם החוק החלש בהכרח חל על הסדרה $\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$?

האם משפט הגבול המרכזי בהכרח חל על הסדרה $\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$?

פתרון 8

נראה שהסדרה $\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$ היא סדרת משתנים ב"ת שווי התפלגות ובעלי שונות סופית. מכאן ינבע שעל הסדרה חלים החוק החלש ומשפט הגבול המרכזי.

האי תלות נובעת מהאי תלות שיש בסדרה $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ (הערכים שמקבלים משתנים מסוימים, לא משפיעים על הערכים שמקבלים אחרים).

מכיון שהמשתנים בסדרה $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ הם שווי התפלגות אז המשתנים $\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$ הם שווי התפלגות. לכן לכולם יש את אותה שונות. מתקיים $V(Y_1) = E(Y_1^2) - E^2(Y_1) \le E(Y_1^2) \le E(X_1^2)$. מכיון שהשונות של המשתנים X_1 היא סופית, אז $E(X_1^2) < \infty$ ולכן $V(Y_1) < \infty$.
