

שאלה

מבצעים 5 הטלות ב"ת של קובייה תקינה. מהו מקדם המתאם בין מספר הפעמים שמתקבלת התוצאה 3 לבין מספר הפעמים שמתקבלת התוצאה 6 ?

פתרון בדרך ראשונה

$$r(X_3, X_6) = \frac{COV(X_3, X_6)}{\sqrt{V(X_3)V(X_6)}} \text{ מבוקש } i. \text{ מספר הפעמים שמתקבלת תוצאה } i.$$

$$X_1 + X_2 + X_4 + X_5 + X_6 = 5 - X_3 \text{ מתקיים}$$

$$COV(X_3, 5 - X_3) = COV(X_3, 5) - COV(X_3, X_3) = 0 - V(X_3) = -V(X_3) \text{ מתקיים}$$

$$COV(X_3, X_1 + X_2 + X_4 + X_5 + X_6) =$$

$$= COV(X_3, X_1) + COV(X_3, X_2) + COV(X_3, X_4) + COV(X_3, X_5) + COV(X_3, X_6)$$

$$COV(X_3, X_6) = -\frac{1}{5}V(X_3) \text{ לכן } 5COV(X_3, X_6) \text{ ל } COV(X_3, X_6) \text{ שווה זה סימטריה}$$

$$r(X_3, X_6) = \frac{COV(X_3, X_6)}{\sqrt{V(X_3)V(X_6)}} = \frac{-\frac{1}{5}V(X_3)}{V(X_3)} = -\frac{1}{5} \text{ לכן } V(X_3) = V(X_6) \text{ מתקיים}$$

פתרון בדרך שנייה

$$X_3 \sim B\left(5, \frac{1}{6}\right), \quad X_6 \sim B\left(5, \frac{1}{6}\right), \quad X_3 + X_6 \sim B\left(5, \frac{2}{6}\right)$$

$$V(X_3) = V(X_6) = 5 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{36}, \quad V(X_3 + X_6) = 5 \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{40}{36}$$

$$V(X_3 + X_6) = V(X_3) + V(X_6) + 2 \cdot COV(X_3, X_6)$$

$$COV(X_3, X_6) = \frac{V(X_3 + X_6) - V(X_3) - V(X_6)}{2} = \frac{\frac{40}{36} - \frac{25}{36} - \frac{25}{36}}{2} = -\frac{5}{36} \text{ לכן}$$

$$r(X_3, X_6) = \frac{COV(X_3, X_6)}{\sqrt{V(X_3)V(X_6)}} = \frac{-\frac{5}{36}}{\sqrt{\frac{25}{36} \cdot \frac{25}{36}}} = -\frac{1}{5}$$

פתרון בדרך שלישית

X_3 הוא סכום של 5 אינדיקטורים שכל אחד מהם מצביע על קבלת תוצאה 3 בהטלה מסוימת.
 X_6 הוא סכום של 5 אינדיקטורים שכל אחד מהם מצביע על קבלת תוצאה 6 בהטלה מסוימת.

$$X_3 = \sum_{i=1}^5 X_{3,i}, \quad X_6 = \sum_{j=1}^5 X_{6,j}$$

$$COV(X_3, X_6) = COV\left(\sum_{i=1}^5 X_{3,i}, \sum_{j=1}^5 X_{6,j}\right) = \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 COV(X_{3,i}, X_{6,j})$$

אך עבור כל $X_{3,i} : i \neq j$ ב $X_{6,j}$ כי מדובר בהטלות שונות.

לכן הביטוי שווה ל $\sum_{i=1}^5 COV(X_{3,i}, X_{6,i})$. משיקולי סימטריה זה שווה ל $5 \cdot COV(X_{3,1}, X_{6,1})$.

$$COV(X_{3,1}, X_{6,1}) = E(X_{3,1} X_{6,1}) - E(X_{3,1})E(X_{6,1}) = 0 - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = -\frac{1}{36}$$

(לא יתכן שסימולטנית שני האינדיקטורים $X_{3,1}$ ו $X_{6,1}$ יהיו הצלחה כי לא יתכן שבאותה הטלה יתקבל

גם 3 וגם 6 .)

$$. COV(X_3, X_6) = -\frac{5}{36} \text{ לכן}$$

$$. V(X_3) = V(X_6) = 5 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \text{ לכן } . B\left(6, \frac{1}{6}\right) \text{ הם כל אחד משתנה}$$

$$r(X_3, X_6) = \frac{-\frac{5}{36}}{\sqrt{5 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot 5 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}}} = -\frac{1}{5}$$

שלומי