

קירוב פואסוני

בנתונים מסוימים ניתן לקרב משתנה בינומי על-ידי משתנה פואסוני. זאת אומרת שפונקציות ההסתברות של שניהם יהיו דומות.

נתון משתנה $X \sim \text{Bin}(n, p)$. נניח ש n הוא גדול, p הוא קטן ו np הוא קבוע. נראה שבמקרה זה למשתנה X יש התפלגות דומה לזו של משתנה $Z \sim P(\lambda)$. נראה שעבור ערכי k קטנים, לשני המשתנים יש הסתברויות דומות לקבל אותם.

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!} p^k (1-p)^n (1-p)^{-k}$$

מכפלת k המספרים $n, n-1, \dots, n-k+1$ בקבוע קטן מתנהגת כמו מכפלת n^k באותו קבוע (היחס $\frac{n-k+1}{n}$ הוא קרוב ל 1 והיחס בין שתי המכפלות הוא מכפלה של k שברים כאלה שקרובים ל 1).

$1-p$ הוא קבוע קרוב ל 1 ולכן החזקה ה- k שלו מתנהגת כמו 1.

לכן נקבל

$$\frac{n^k}{k!} p^k (1-p)^n = \frac{(np)^k}{k!} (1-p)^n = \frac{\lambda^k}{k!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$
